TITLE:
ON LOG RIGID GEOMETRY AND CRYSTALLINE FUNDAMENTAL GROUPS (Rigid Geometry and Group Action)

AUTHOR(S):
志甫, 淳

CITATION:
志甫, 淳. ON LOG RIGID GEOMETRY AND CRYSTALLINE FUNDAMENTAL GROUPS (Rigid Geometry and Group Action). 数理解析研究所講究録 1998, 1073: 114-131

ISSUE DATE:
1998-12

URL:
http://hdl.handle.net/2433/62595

RIGHT:

京都大学学術情報リポジトリ
KURENAI 紅
Kyoto University Research Information Repository

数理解析研究所講究録
1073巻 1998年 114-131

ON LOG RIGID GEOMETRY AND CRYSTALLINE FUNDAMENTAL GROUPS

東北大学大学院理学研究科　志甫 淳 (ATSUSHI SHIHO)

1. 序

本稿では、log scheme に対する rigid geometry の基礎を述べて log scheme に対してある p 進解析的な cohomology（ここでは analytic cohomology と呼ぶことにする）を定義する。そして $\mathbb{C}$ 上の代数多様体上の局所系、接続付ベクトル束あるいは de Rham 基本群について Deligne などにより知られているいくつかの定理の p 進的な類似が成り立つことを紹介する。

なお、表題の中にある「クリスタル基本群」とは、筆者により定義されたある種の log scheme に対する p 進的な基本群のことであり、上に述べた「p 進的な類似」の中には、このクリスタル基本群に関するある定理が含まれる。筆者自身としては、このクリスタル基本群の研究こそが本稿に述べることの動機となっているということを蛇足ながら注意しておく。

本稿の構成は次の通りである：まず第2節においては、$\mathbb{C}$ 上の代数多様体上の局所系、接続付ベクトル束あるいは de Rham 基本群について Deligne など ([D1]) により知られているいくつかの定理を紹介する。第3節では、p 進的理論における重要な概念であり、ここの話ではある意味では $\mathbb{C}$ 上の理論における局所系の類似と思える log convergent site 上の isocrystal というものを紹介して、それを用いたクリスタル基本群の定義を復習し、筆者の研究の動機を簡単に述べる。第4節では、rigid 解析幾何における tubular neighborhood、overconvergent isocrystal 及び rigid cohomology の定義の復習を簡単にする。そして第5節においては log scheme に対する rigid geometry の基礎および log scheme の analytic cohomology の定義を述べて、Poincaré lemma の p 進解析的な類似を述べる。第6節では、log scheme の analytic cohomology と通常の scheme の rigid cohomology との関係（およびその系）を述べ、また、そのクリスタル基本群への応用を述べる。

最後に、筆者に研究集会での講演の機会および本稿を書く機会を与えて下さった関口力氏および諏訪紀幸氏、また本研究に関して助言を下さった斎藤毅氏および都築暢夫氏、そして私を励まして下さった方々に深く感謝の意を捧げたいと思います。

なお、本稿に関わる研究の一部は、筆者が日本学術振興会特別研究員であった頃に行われたことを付記しておきます。

2. $\mathbb{C}$ 上の代数多様体上の局所系と接続付ベクトル束

この節では $\mathbb{C}$ 上の代数多様体上の局所系と接続付ベクトル束について Deligne らにより知られているいくつかの結果を復習する。

X を $\mathbb{C}$ 上の連結かつ smooth な代数多様体とし、$j : X \hookrightarrow \overline{X}$を X の連結かつ smooth なコンパクト化で $D := \overline{X} - X$ が$\overline{X}$内の単純正規交叉因子であるようなものであるとし、$D = \sum_{i \in I} D_i$ (各 D_iは X の smooth な因子) とおく。(なお、広中の定理よりこのような $j : X \hookrightarrow \overline{X}$は常に存在する。) $X^{\mathrm{an}}, \overline{X}^{\mathrm{an}}, D^{\mathrm{an}}$をそれぞれ $X, \overline{X}, D$ から自然に定まる複素解析空間とする。

まず、$L(X^{\mathrm{an}})$ を X^{an}上の有限次元 $\mathbb{C}$ 線型空間の局所系のなす圏、$C(X^{\mathrm{an}})$ を X^{an} 上の integrable な接続付ベクトル束のなす圏とする。この時次の事実がある：

Fact 2.1. 関手$\Phi : L(X^{\mathrm{an}}) \longrightarrow C(X^{\mathrm{an}})$ を次のように定義する：$V \in L(X^{\mathrm{an}})$ に対して$\Phi(V) = (E, \nabla)$ を、

$$E := V \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{X^{\mathrm{an}}},$$

$$\nabla := id \otimes d : E = V \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{X^{\mathrm{an}}} \longrightarrow V \otimes_{\mathbb{C}} \Omega^1_{X^{\mathrm{an}}} := E \otimes_{\mathcal{O}_{X^{\mathrm{an}}}} \Omega^1_{X^{\mathrm{an}}}$$

とする。この時、Φは圏同値となる。逆関手は

$$(E, \nabla) \mapsto \mathrm{Ker}\nabla$$

で与えられる。

さて、$V \in L(X^{\mathrm{an}})$ とし、$(E, \nabla) := \Phi(V)$ とおく。∇ が induce する写像

$$E \otimes \Omega^n_{X^{\mathrm{an}}} \longrightarrow E \otimes \Omega^{n+1}_{X^{\mathrm{an}}} \ ; \ e \otimes \omega \mapsto \nabla(e) \wedge \omega + e \otimes d\omega$$

もまた ∇ と書く。(E, ∇) により定義される complex

$$0 \longrightarrow E \xrightarrow{\nabla} E \otimes \Omega^1_{X^{\mathrm{an}}} \xrightarrow{\nabla} \cdots \xrightarrow{\nabla} E \otimes \Omega^n_{X^{\mathrm{an}}} \xrightarrow{\nabla} \cdots$$

を (E, ∇) に対応する de Rham complex と言い、$DR(E, \nabla)$ と書くことにする。すると自然な包含写像$V \hookrightarrow V \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{X^{\mathrm{an}}} = E$ により写像$V \longrightarrow DR(E, \nabla)$ が induce される。この時、次の定理がある。

Theorem 2.2 (Poincaré lemma)**.** 上の自然な写像$V \longrightarrow DR(E, \nabla)$ は quasi-isomorphism である。従って自然な cohomology の同型

$$H^*(X^{\mathrm{an}}, V) \cong H^*(X^{\mathrm{an}}, DR(E, \nabla))$$

がある。

上の cohomology の同型の左辺は X^{an}上の層のなす abel 圏での cohomology であり、右辺はある de Rham complex の cohomology である。すなわち Poincare lemma とは、良い層の cohomology は de Rham complex の cohomology で書けるというタイプの定理である、と言える。

次に category $C(\overline{X}^{\mathrm{an}}, D^{\mathrm{an}})$ を $(\overline{X}^{\mathrm{an}}, D^{\mathrm{an}})$ 上の integrable な対数的接続付ベクトル束のなす圏とする。そして関手

$$j^* : C(\overline{X}^{\mathrm{an}}, D^{\mathrm{an}}) \longrightarrow C(X^{\mathrm{an}})$$

を「X^{an}上への制限」により定義されるものとする。

さて、$(\tilde{E}, \tilde{\nabla}) \in C(\overline{X}^{\mathrm{an}}, D^{\mathrm{an}})$ とし、$(E, \nabla) := j^*(\tilde{E}, \tilde{\nabla})$ とおく。この時、通常の接続の時と同様の定義により、$(\tilde{E}, \tilde{\nabla})$ は次のような log de Rham complex を定める。

$$0 \longrightarrow \tilde{E} \xrightarrow{\tilde{\nabla}} \tilde{E} \otimes \Omega^1_{\overline{X}^{\mathrm{an}}}(\log D^{\mathrm{an}}) \xrightarrow{\tilde{\nabla}} \cdots \xrightarrow{\tilde{\nabla}} \tilde{E} \otimes \Omega^n_{\overline{X}^{\mathrm{an}}}(\log D^{\mathrm{an}}) \xrightarrow{\tilde{\nabla}} \cdots .$$

これも $DR(\tilde{E}, \tilde{\nabla})$ と書くことにする。この時、関手の射 $id \longrightarrow j_* j^*$により、自然に写像$\iota : DR(\tilde{E}, \tilde{\nabla}) \longrightarrow j_* DR(E, \nabla)$ が induce される。この時、次が成り立つ：

Theorem 2.3. 記号は上の通りとし、更に $(\tilde{E}, \tilde{\nabla})$ の各 $D_i \quad (i \in I)$ に沿った residue が全て冪零であるとする。この時、上の写像

$$\iota : DR(\tilde{E}, \tilde{\nabla}) \longrightarrow j_* DR(E, \nabla)$$

は quasi-isomorphism である。従って自然な cohomology の同型

$$H^*(\overline{X}^{\mathrm{an}}, DR(\tilde{E}, \tilde{\nabla})) \cong H^*(X^{\mathrm{an}}, DR(E, \nabla))$$

がある。

Outline of Proof. $D := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$, $D^* := D - \{0\}$ とおく。主張は$\overline{X}^{\mathrm{an}}$上 local なので、$\overline{X}^{\mathrm{an}} := D^n$, $X := (D^*)^r \times D^{n-r}$としてよい。$(z_1, z_2, \cdots z_n)$ を$\overline{X}^{\mathrm{an}} = D^n$の座標とする。すると [D1][II, Proposition 5.2] よりあるベクトル束の同型$\tilde{E} \cong \mathcal{O}^a_{\overline{X}^{\mathrm{an}}}$ を通じて$\tilde{\nabla}$を行列表示した時、$\tilde{\nabla}$は次のように書ける：

$$\tilde{\nabla} = d + \sum_{i=1}^{r} \Gamma_i \frac{dz_i}{z_i}.$$

ここでΓ_i達は $\mathbb{C}$ 係数の上三角行列で冪零なものである。すると、$\tilde{E}$の適当な接続付ベクトル束による filtration を考え、その graded quotient を考えることにより、$(\tilde{E}, \nabla) = (\mathcal{O}_{\overline{X}^{\mathrm{an}}}, d)$ と仮定してよい。

この時の証明は $n = r = 1$ の時が本質的なので、以下そう仮定し、座標を z と書く。

$$\tau : j_* DR(E, \nabla) \longrightarrow DR(\tilde{E}, \tilde{\nabla})$$

を、

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^n \mapsto \sum_{n\geq 0} a_n z^n,$$
$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^n \frac{dz}{z} \mapsto \sum_{n\geq 0} a_n z^n \frac{dz}{z}$$

により定義される写像とする。すると$\tau\circ\iota = id$である。また、$H: j_*\Omega^1_{X^{\mathrm{an}}} \longrightarrow j_*\mathcal{O}_{X^{\mathrm{an}}}$を

$$H(\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^n \frac{dz}{z}) = \sum_{n<0} \frac{a_n}{n} z^n$$

で定義すると、Hは$\iota\circ\tau$とidの間のホモトピーを定める。従ってιは quasi-isomorphic である。 □

定理の系として次が言える。

Corollary 2.4. $(\tilde{E},\tilde{\nabla})$を定理の条件をみたす$C(\overline{X}^{\mathrm{an}}, D^{\mathrm{an}})$の元とし、$V := \Phi^{-1}(j^*(\tilde{E},\tilde{\nabla}))$とする。この時、$H^*(X^{\mathrm{an}}, V)$は有限次元である。

Proof. Category $C(\overline{X}, D)$ を $(\overline{X}, D)$ 上の integrable な対数的接続付ベクトル束のなす圏とする。この時 GAGA functor により圏同値

$$G : C(\overline{X}, D) \longrightarrow C(\overline{X}^{\mathrm{an}}, D^{\mathrm{an}})$$

が誘導される。

$(E',\nabla') := G^{-1}(\tilde{E},\tilde{\nabla})$ $(E,\nabla) := j^*(\tilde{E},\tilde{\nabla})$ とおく。すると、次の同型がある。

$$\begin{aligned} H^*(X^{\mathrm{an}}, V) &\cong H^*(X^{\mathrm{an}}, DR(E,\nabla)) \text{ (Poincaré lemma)} \\ &\cong H^*(\overline{X}^{\mathrm{an}}, DR(\tilde{E},\tilde{\nabla})) \text{ (Theorem 2.3)} \\ &\cong H^*(\overline{X}, DR(E',\nabla')). \end{aligned}$$

$\overline{X}$は proper で、$DR(E',\nabla')$ の各 component は coherent ゆえ、最後の cohomology 群は有限次元である。従って、主張が言えた。 □

Remark 2.5. Theorem 2.3 はもう少し一般の $(\tilde{E},\tilde{\nabla})$ に対しても成り立ち、その結果、任意の $L(X^{\mathrm{an}})$ の object V に対してその cohomology 群 $H^*(X^{\mathrm{an}}, V)$ の有限次元性を示すことができる。

定理の系をもう一つ述べる為に、nilpotent なる用語を導入する。

Definition 2.6. $V \in L(X^{\mathrm{an}})$ (resp. $(\tilde{E},\tilde{\nabla}) \in C(\overline{X}, D)$) が nilpotent であるとは、$V$ (resp. $(\tilde{E},\tilde{\nabla})$) が X^{an}上の定数層 $\mathbb{C}_{X^{\mathrm{an}}}$ (resp. $(\overline{X}, D)$ 上の integrable な対数的接続付ベクトル束 $(\mathcal{O}_{\overline{X}}, d)$) による拡大の繰り返しで書けることである。

$L(X^{\mathrm{an}})$ (resp. $C(\overline{X},D)$) の nilpotent な object 全体のなす full subcategory を $NL(X^{\mathrm{an}})$ (resp. $NC(\overline{X},D)$) と書くことにすると、Theorem 2.3 の系として、次が言える：

Corollary 2.7. $j\circ G^{-1}$は圏同値

$$NC(\overline{X},D)\longrightarrow NL(X^{\mathrm{an}})$$

を induce する。特に、圏 $NC(\overline{X},D)$ は最初に決めた X の compact 化$\overline{X}$の取り方に依らない。

さて、$x\in X(\mathbb{C})$ とし、ωを functor

$$NC(\overline{X},D)\longrightarrow Vec_{\mathbb{C}},\ (\tilde{E},\tilde{\nabla})\mapsto \tilde{E}_x\ (:=\tilde{E}\text{の } x \text{ での fiber})$$

とする。この時 $NL(\overline{X},D)$ は淡中圏であり、ωは fiber functor である。$(\overline{X},D)$ の x を基点とする de Rham 基本群$\pi_1^{\mathrm{dR}}((\overline{X},D),x)$ を $(NL(\overline{X},D),\omega)$ の Tannaka dual として定義する。(これは $\mathbb{C}$ 上の pro-unipotent な代数群になる。淡中圏については [D2], [D-Mi], [Sa] 等を参照のこと。) この時、上の系の de Rham 基本群を用いた言い換えは次のようになる。

Corollary 2.8. 記号を上の通りとする時、de Rham 基本群$\pi_1^{\mathrm{dR}}((\overline{X},D),x)$ は最初に決めた X のコンパクト化 $(\overline{X},D)$ の取り方に依らない。

次節以降では、Theorem 2.2, 2.3, Corollary 2.4, 2.7, 2.8 の p 進的な類似と思える定理を紹介する。但し、その類似は必ずしも完全に平行なものではないことを注意しておく。(詳しい statement 及び terminology については後の節を参照のこと。)

まず、Theorem 2.2 については、log convergent cohomology と（log scheme に対する）analytic cohomology （これはある種の de Rham complex の cohomology である）との比較定理として類似が成立する (Theorem 5.5)。つまりそこでは局所系の cohomology の類似として convergent cohomology を考えているわけであるが、しかし一般に開いた多様体の convergent cohomology は有限次元にはならないのである。すなわち Corollary 2.7 の p 進版はこの類似のままでは成立しない。従って開いた多様体に対しては convergent cohomology は良い cohomology 理論であるとは言えない。そこで開いた多様体に対する良い cohomology 理論とは何か、という問いがなされるわけだが、現在の所、rigid cohomology が良いものであろうとされている。Rigid cohomology の定義は後述するが、これもまたある種の de Rham complex の cohomology と考えられる。そして Theorem 2.3 の類似は、log scheme の analytic cohomology と rigid cohomology の比較定理として成立する (Theorem 6.2)。また、ある種の係数に対する rigid cohomology の有限性定理が Theorem 2.2, 2.3 の Corollary

として成立する (Corollary 6.4)。我々はこれを Corollary 2.4 の p 進版であると思うことにする。但し、証明の方法は Corollary 2.4 とは異なり、Theorem 2.2 を用いて complete な log scheme の log convergent cohomology の有限性に帰着することにより示される。そして、これを用いることにより、Corollary 2.7, 2.8 の類似は、log convergent site 上の nilpotent isocrystal の圏およびクリスタル基本群に対して成立することがわかる (Corollary 6.6, 6.7)。

3. Log convergent site 上の isocrystal

この節では、適当な log scheme の図式が与えられた時に、それに対して log convergent site と、その上の isocrystal というものを定義する。本稿の話においては、この isocrystal はある意味では前節での X^{an} 上の有限次元 $\mathbb{C}$ 線型空間の局所系に対応するものであると考えられる。また、この isocrystal を用いたクリスタル基本群の定義を復習し、筆者自身の研究の動機を述べる。

以下、次のように記号を定める。k を標数 $p>0$ の完全体、V を混標数の完備離散付値環で、剰余体が k であるものとする。また、K を V の分数体とする。また、本稿では、log structure は常に Fontaine-Illusie-Kato の意味であるとし、log structure は常に Zariski site で考えるものとする。(Log structure については [Kk1]、[Kk2] 等を参照のこと。)

次の図式が与えられたとする:

$$(X, M) \xrightarrow{f} (\operatorname{Spec} k, \iota^*N) \overset{\iota}{\hookrightarrow} (\operatorname{Spf} V, N).$$

ここで、M, N はそれぞれ $X, \operatorname{Spf} V$ 上の fine log structure、f は fine log scheme の射で underlying scheme の射としては有限型であるもの、ιは自然な exact closed immersion である。

この時、(X, M) の $(\operatorname{Spf} V, N)$ 上の log convergent site を次のように定義する。(これは Ogus の論文 [O2] の定義を log 化したものである。)

Definition 3.1. 記号は上の通りとする。この時 (X, M) の $(\operatorname{Spf} V, N)$ 上の log convergent site $((X, M)/(\operatorname{Spf} V, N))_{\mathrm{conv}}$ (しばしば $(X/V)^{\log}_{\mathrm{conv}}$ と略記する) を次のように定義する:Object は4つ組 $((T, M_T), (Z, M_Z), i, z)$ である。ここで (T, M_T) は $(\operatorname{Spf} V, N)$ 上の p-adic admissible formal fine log scheme (formal scheme に対しての"admissible" の定義は加藤文元氏の稿を参照のこと)、(Z, M_Z) は $(\operatorname{Spec} k, \iota^*N)$ 上の fine log scheme で、$i:(Z, M_Z) \hookrightarrow (T, M_T)$ は $(\operatorname{Spf} V, N)$ 上の exact closed immersion で $Z \supset (\operatorname{Spec}(\mathcal{O}_T/p\mathcal{O}_T))_{\mathrm{red}}$ を満たすもの、そして $z:(Z, M_Z) \longrightarrow (X, M)$ は $(\operatorname{Spec} k, \iota^*N)$ 上の fine log scheme の射である。この 4 つ組 $((T, M_T), (Z, M_Z), i, z)$ のことを enlargement と呼び、しばしば T と略記する。また、enlargement$((T, M_T), (Z, M_Z), i, z)$ と

$((T', M_{T'}), (Z', M_{Z'}), i', z')$ の間の morphism とは、上に述べた enlargement の構造を保つ射 $(T, M_T) \longrightarrow (T', M_{T'})$、$(Z, M_Z) \longrightarrow (Z', M_{Z'})$ の組のこととする。そして、enlargement$((T, M_T), (Z, M_Z), i, z)$ の covering とは、T の Zariski topology から induce されるものとする。

各 enlargement $T := ((T, M_T), (Z, M_Z), i, z)$ に対して $K \otimes_V \Gamma(T, \mathcal{O}_T)$ を対応させるような $(X/V)^{\log}_{\mathrm{conv}}$ 上の層のことを以下 $K \otimes \mathcal{O}_{X/V}$ と書くことにする。また、log convergent site $(X/V)^{\log}_{\mathrm{conv}}$ 上の層 E に対して、その cohomology $H^*((X/V)^{\log}_{\mathrm{conv}}, E)$ を log convergent cohomology と呼ぶことにする。

さて、次に log convergent site $(X/V)^{\log}_{\mathrm{conv}}$ 上の isocrystal の定義を述べる。

Definition 3.2. 記号は上の通りとする。この時、$(X/V)^{\log}_{\mathrm{conv}}$ 上の $K \otimes \mathcal{O}_{X/V}$-加群の層 E が isocrystal であるとは、次の条件を満たすこと。

1. 任意の enlargement$T := ((T, M_T), (Z, M_Z), i, z)$ に対し、E が自然に induce する T 上の Zariski 層を E_T と書く時、ある T 上の連接層 F が存在して、$E_T \cong K \otimes_V F$ と書ける。
2. 任意の enlargement 間の射 $f : T' \longrightarrow T$ に対して、T' 上の層の射 $f^* E_T \longrightarrow E_{T'}$ が induce されるが、これが常に同型である。

また、isocrystal E が locally free であるとは、条件 1. において、F が locally free sheaf にとれることとして定義する。

以下、$(X/V)^{\log}_{\mathrm{conv}}$ 上の isocrystal 全体のなす圏を $I((X/V)^{\log}_{\mathrm{conv}})$ と書く。

Isocrystal に対しても、nilpotent という概念が接続の時と同様にして次のように定義される。

Definition 3.3. 記号を上の通りとする。Log convergent site $(X/V)^{\log}_{\mathrm{conv}}$ 上の isocrystal E が nilpotent であるとは、E が $(X/V)^{\log}_{\mathrm{conv}}$ 上の $K \otimes \mathcal{O}_{X/V}$-加群の層の圏において、$K \otimes \mathcal{O}_{X/V}$ による拡大の繰り返しで書けるということである。

$(X/V)^{\log}_{\mathrm{conv}}$ 上の nilpotent な isocrystal 全体のなす圏を $NI((X/V)^{\log}_{\mathrm{conv}})$ と書くことにする。

次にこの圏を用いてクリスタル基本群を定義する。状況は上の通りとし、X の開集合 X_{triv} を

$$X_{\mathrm{triv}} := \{x \in X \mid (f^* \imath^* N)_x \cong M_x\}$$

と定義する。$x \in X_{\mathrm{triv}}(k)$ とし、また、$H^0((X/V)^{\log}_{\mathrm{conv}}, K \otimes \mathcal{O}_{X/V}) = K$ であると仮定する。そしてωを自然な包含写像 $i : (x, i^* M) \hookrightarrow (X, M)$ により引き起こされる functor

$$NI((X/V)^{\log}_{\mathrm{conv}}) \longrightarrow NI(x/V)^{\log}_{\mathrm{conv}}) \simeq Vec_K$$

とする。この時 $NI((X/V)^{\log}_{\mathrm{conv}})$ は淡中圏であり ω は fiber functor であることが示される。そこで (X, M) の $(\mathrm{Spf}\, V, N)$ 上の x を基点とするクリスタル基本群 $\pi_1^{\mathrm{crys}}((X, M)/(\mathrm{Spf}\, V, N), x)$ (時には $\pi_1^{\mathrm{crys}}((X/V)^{\log}, x)$ と略記する）を $(NI((X/V)^{\log}_{\mathrm{conv}}), \omega)$ の Tannaka dual として定義する。

さて、ここで筆者自身の研究の動機を簡単に述べておく。k, V, K を上の通りとし、$\overline{X}$ を k 上 proper, smooth な代数多様体、D を $\overline{X}$ 内の単純正規交叉因子、$X = \overline{X} - D$ とする。M を D により定義される log structure、$x \in X(k)$ とする時、$(\overline{X}, M)$ の $\mathrm{Spf}\, V$ 上の x を基点とするクリスタル基本群 $\pi_1^{\mathrm{crys}}((\overline{X}, M)/\mathrm{Spf}\, V, x)$ が定義されるが、これはクリスタル基本群の話から見ると「X のクリスタル基本群」と思うべきものである。従って、次が成り立つことが自然に期待される：

Hope 3.4. 記号を上の通りとする時、クリスタル基本群 $\pi_1^{\mathrm{crys}}((\overline{X}, M)/\mathrm{Spf}\, V, x)$ は X の上のような compact 化 $\overline{X}$ に依らないであろう。

これを実際証明するために rigid geometry を用いるというのが筆者の考えたことであり、本稿の研究の動機となったわけである。（実際、上の Hope が正しいことが第 6 節で述べられる。）

最後に、後に必要となるので、$a \in \mathbb{N}, a > 0$ に対して、F^a-isocrystal の定義を述べる。図式

$$(X, M) \xrightarrow{f} (\mathrm{Spec}\, k, \iota^* N) \overset{\iota}{\hookrightarrow} (\mathrm{Spf}\, V, N)$$

をこの節の最初に与えたようなものであるとし、F_X, F_k をそれぞれ $(X, M), (\mathrm{Spec}\, k, \iota^* N)$ の Frobenius 写像であるとする。ここで次の条件を仮定する：F_k^a の持ち上げとなっている formal log scheme の射 $\sigma : (\mathrm{Spf}\, V, N) \longrightarrow (\mathrm{Spf}\, V, N)$ が存在する。この σ を一つ固定する。この時、次の図式が存在する。

$$\begin{array}{ccccc}
(X, M) & \xrightarrow{f} & (\mathrm{Spec}\, k, \iota^* N) & \xrightarrow{\iota} & (\mathrm{Spf}\, V, N) \\
{\scriptstyle F_X^a}\downarrow & & {\scriptstyle F_k^a}\downarrow & & {\scriptstyle \sigma}\downarrow \\
(X, M) & \xrightarrow{f} & (\mathrm{Spec}\, k, \iota^* N) & \xrightarrow{\iota} & (\mathrm{Spf}\, V, N).
\end{array}$$

この写像に関する pull-back により、functor

$$I((X/V)^{\log}_{\mathrm{conv}}) \longrightarrow I((X/V)^{\log}_{\mathrm{conv}})$$

が定義される。これを $F^{a,*}$ と書くことにする。以上の準備の下で、F^a-isocrystal を次のように定義する：

Definition 3.5. 状況は上の通りとする。この時、F^a-isocrystal とは組 (E, Φ) のことである。ここで E は $(X/V)^{\log}_{\mathrm{conv}}$ 上の isocrystal で、Φ は同型 $F^{a,*}E \xrightarrow{\sim} E$ である。

4. RIGID GEOMETRYの復習

この節では、tubular neighborhoodおよびrigid cohomologyについて簡単に復習することにする(詳しくは[Be1], [Be2], [Be3]を参照のこと)。この節においては、kを標数$p>0$の完全体、Vを混標数の離散付値環で剰余体がkであるもの、KをVの分数体とする。また、$\Gamma := \{(1/p)^a \mid a \in \mathbb{Q}\} \subset \mathbb{R}_{>0}$とおく。また、rigid解析幾何についての用語は、加藤文元氏の稿の用語に従うものとする。

Pを$\mathrm{Spf}\,V$上のp-adic admissible formal schemeとし、P_{rig}をそのRaynaud一般fiberとする。この時reduction map $\mathrm{Red}_P : P_{\mathrm{rig}} \longrightarrow P$が定義される。$X$を$P$のclosed subschemeとする時、$X$の$P$内での(半径1の)tubular neighborhood $]X[_P$を$]X[_P := \mathrm{Red}_P^{-1}(X) \subset P_{\mathrm{rig}}$で定義する。$P$がaffineで$X$の$\Gamma(P, \mathcal{O}_P)$における定義idealの生成元が$f_1, f_2, \cdots, f_n$である時、$]X[_P$は次のように書ける：

$$]X[_P = \{x \in P_{\mathrm{rig}} \mid |f_i(x)| < 1 \ (1 \le i \le n)\}.$$

さて、Pをaffineで$f_1, \cdots, f_n$を上の通りとする時、$0 < \lambda < 1, \lambda \in \Gamma$なる$\lambda$に対して、$X$の$P$内での半径$\lambda$のclosed tubular neighborhood $[X]_{P,\lambda}$を

$$[X]_{P,\lambda} := \{x \in P_{\mathrm{rig}} \mid |f_i(x)| \le \lambda \ (1 \le i \le n)\}$$

で定義する。λが充分1に近いときにはこの定義は実際f_i達の取り方に依らないことが言え、従ってλが充分1に近ければ$[X]_{P,\lambda}$はPがaffineとは限らない時にも（貼り合わせを用いて）定義される。

さて、Yを$\mathrm{Spec}\,k$上の連結な代数多様体で、$X \subset Y$をopen subschemeとする。$Z = Y - X$とおく。今、$\mathrm{Spf}\,V$上のp-adic admissible formal scheme Pおよびclosed immersion $Y \hookrightarrow P$で、PはXのある近傍上では$\mathrm{Spf}\,V$上smoothになるようなものが存在すると仮定する。充分1に近い$\lambda \in \Gamma, \lambda < 1$に対して$U_\lambda :=]Y[_P - [Z]_{P,\lambda}$とおき、open immersion $U_\lambda \hookrightarrow]Y[_P$を$j_\lambda$と書くことにする。$]Y[_P$上の層$E$に対して$j^\dagger E$を

$$j^\dagger E := \varinjlim_{\lambda \to 1} j_{\lambda,*} j_\lambda^{-1} E$$

で定義する。すると、projections

$$p_i :]Y[_{P^2} \longrightarrow]Y[_P \qquad (i = 1, 2),$$

$$p_{ij} :]Y[_{P^3} \longrightarrow]P[_{P^2} \qquad (1 \le i < j \le 3)$$

に対してfunctors

$$p_i^* : (j^\dagger \mathcal{O}_{]Y[_P}\text{-modules}) \longrightarrow (j^\dagger \mathcal{O}_{]Y[_{P^2}}\text{-modules}),$$

$$p_{ij}^* : (j^\dagger \mathcal{O}_{]Y[_{P^2}}\text{-modules}) \longrightarrow (j^\dagger \mathcal{O}_{]Y[_{P^3}}\text{-modules})$$

が自然に定義されることがわかる。以上の準備の下で、(X,Y) の V 上の P に関する overconvergent isocrystal は次のようにして定義される。

Definition 4.1. 記号は上の通りとする。この時、(X,Y) の V 上の P に関する overconvergent isocrystal とは組 (E,ϵ) のこと。ここで、E は locally free $j^\dagger\mathcal{O}_{]Y[_P}$-module であり、また$\epsilon$は同型$p_2^*E \xrightarrow{\sim} p_1^*E$ で cocycle 条件 $p_{13}^*(\epsilon) = p_{12}^*(\epsilon)\circ p_{23}^*(\epsilon)$ を満たすもののこと。

特に $\mathcal{O} := (j^\dagger\mathcal{O}_Y, \mathrm{id})$ は (X,Y) の V 上の P に関する overconvergent isocrystal である。

さて、引き続き X,Y,P を上の通りとし、$E := (E,\epsilon)$ を (X,Y) の V 上の P に関する overconvergent isocrystal とする。この時、自然に (E,ϵ) に associate した$]Y[_P$ 上の de Rham complex

$$0 \to E \to E\otimes\Omega^1_{]Y[_P} \to E\otimes\Omega^2_{]Y[_P} \to \cdots$$

が定義される (詳しい定義は略する)。これを $DR(E,\epsilon)$ (あるいは簡単に $DR(E)$) と書くことにする。この時、$E := (E,\epsilon)$ を係数とする pair $X\subset Y$ の rigid cohomology $H^*_{\mathrm{rig}}(X\subset Y, E)$ を

$$H^*_{\mathrm{rig}}(X\subset Y,E) := H^*(]Y[_P, DR(E))$$

で定義する。

今までは適当な条件を満たす closed immersion $Y\hookrightarrow P$ の存在を仮定していたが、これはいつも存在するとは限らないし、また unique ではない。しかし、実は上のような $Y\hookrightarrow P$ は local には存在する。また、(X,Y) の V 上の P に関する overconvergent isocrystal の category は、up to canonical equivalence で P の取り方に依らないことが知られている (Berthelot)。よって単に (X,Y) の V 上の overconvergent isocrystal という概念が貼り合わせにより定義できる。特に上で挙げた overconvergent isocrystal $\mathcal{O}$ は貼り合わさって (X,Y) の V 上の overconvergent isocrystal を定める。これも $\mathcal{O}$ と書くことにする。また (X,Y) の V 上の overconvergent isocrystal E に対してその rigid cohomology $H^*_{\mathrm{rig}}(X\subset Y,E)$ が、Čech covering をとることにより定義される (詳しくは省略)。そしてその定義は (local な所での) P の取り方によらないこともわかる (Berthelot)。このことは本質的には Kiehl の Theorem B から従う事実である。

最後に Spec k 上の代数多様体 X に対して、その V 上の overconvergent isocrystal およびその rigid cohomology の定義を述べる。$X\hookrightarrow \overline{X}$ を任意の X の compact 化とする。この時、実は $(X,\overline{X})$ の V 上の overconvergent isocrystal の category は、up to canonical equivalence で compact 化$\overline{X}$の取り方に依らないことが知られている (Berthelot)。従って X の V 上の overconvergent isocrystal という概念が定義さ

れる。特に上の$\mathcal{O}$はXのV上のoverconvergent isocrystalを定める。またEをXのV上のoverconvergent isocrystalとする時、そのrigid cohomology $H^*_{\mathrm{rig}}(X,E)$を$H^*_{\mathrm{rig}}(X,E) := H^*_{\mathrm{rig}}(X \subset \overline{X}, E)$により定義する。この定義は$\overline{X}$の取り方に依らないことが知られている (Berthelot)。

最後に、後の節で用いる為に、overconvergent isocrystalに対してのnilpotentという概念を定めておく。Spec k上の代数多様体Xに対して、そのV上のoverconvergent isocrystalの圏を$O(X/V)$と書くことにする。

Definition 4.2. 記号を上の通りとする。$E \in O(X/V)$がnilpotentであるとは、Eが$\mathcal{O}$による拡大の繰り返しで書けること。

以下、XのV上のnilpotentなoverconvergent isocrystalのなす圏を$NO(X/V)$と書くことにする。

5. Log Rigid Geometry (I)

この節では、log schemeに対するlog rigid geometryの基礎およびlog schemeに対するanalytic cohomologyの定義を述べて、Poincaré lemmaのp進的な類似（log convergent Poincaré lemma）を紹介する。

$$(X,M) \xrightarrow{f} (\mathrm{Spec}\, k, \iota^*N) \overset{\iota}{\hookrightarrow} (\mathrm{Spf}\, V, N)$$

を前節で与えた図式とする。すなわち、M, NはそれぞれX, Spf V上のfine log structure、fはfine log schemeの射でunderlying schemeの射としては有限型であるもの、ιは自然なexact closed immersionであるとする。

さて、まずlog schemeに対してtubular neighborhoodの概念を定義しよう。(P,L)を(Spf V, N)上のp-adic admissible formal fine log schemeとし、$i : (X,M) \hookrightarrow (P,L)$を(Spf V, N)上のclosed immersionとする。この時(P,L)上localに、iは次のように分解される：

$$(X,M) \xrightarrow{i'} (P',L') \xrightarrow{a} (P,L),$$

ここでi'はexact closed immersionで、aはlog etaleな射である。この分解の取り方はuniqueではないが、次のことが言える (証明は省略する)：

Proposition 5.1. XのP'内でのtubular neighborhood $]X[_{P'}$は (up to canonical isomorphismで) 上の分解の取り方に依らない。

よって、次の定義が可能となる：

Definition 5.2. $(X,M) \hookrightarrow (P,L)$を上の通りとする時、$(X,M)$の$(P,L)$内でのtubular neighborhood $]X[^{\log}_P$を$]X[^{\log}_P :=]X[_{P'}$ (正確にはそれを貼り合わせたもの) として定義する。

さて、この節の最初の状況で、更に次の図式に fit する (P,L) が与えられたとする：

$$\begin{array}{ccc} (X,M) & \xrightarrow{i} & (P,L) \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ (\operatorname{Spec} k, \iota^*N) & \xrightarrow{\iota} & (\operatorname{Spf} V, N) \end{array} \tag{5.1}$$

ここで i は closed immersion で、g は log smooth かつ integral な射であるとする。また (P^n,L^n) を (P,L) の $(\operatorname{Spf} V,N)$ 上での n-fold fiber product とする。この時、次が言える。(証明は省略する。)

Proposition 5.3. Log convergent site $(X/V)^{\log}_{\text{conv}}$ 上の isocrystal の圏 $I((X/V)^{\log}_{\text{conv}})$ は次の組 (E',ϵ) のなす圏と同値：E'は coherent $\mathcal{O}_{]X[^{\log}_P}$-module で、$\epsilon$は同型 $p_2^*E \xrightarrow{\sim} p_1^*E$ (ここで p_iは projections $]X[^{\log}_{P^2} \longrightarrow]X[^{\log}_P$のこと) で$]X[^{\log}_{P^3}$上で cocycle 条件を満たすもの。

この Proposition を用いると、通常の (over)convergent isocrystal と同様の方法により、$I((X/V)^{\log}_{\text{conv}})$ の object E に対して自然に$]X[^{\log}_P$上の log de Rham complex

$$0 \to E' \to E' \otimes \omega^1_{]X[^{\log}_P} \to \omega^2_{]X[^{\log}_P} \to \cdots$$

が定義される (詳しくは略)。但し E'は上の Proposition において E から定まる組 (E',ϵ) の E'であり、$\omega^{\cdot}_{]X[^{\log}_P}$ は P_{rig}上、$K \otimes_V \omega^{\cdot}_{(P,L)/(\operatorname{Spf} V,N)}$ （ここで$\omega^{\cdot}_{(P,L)/(\operatorname{Spf} V,N)}$は (P,L) の $(\operatorname{Spf} V,N)$ 上の formal log differential module）により定義される連接層の$]X[^{\log}_P$への制限である。この complex を $DR(E)$ と書くことにする。以上の準備の下で、(X,M) の $(\operatorname{Spf} V,N)$ 上の E を係数とする analytic cohomology を次のように定義する：

Definition 5.4. 記号を上の通りとする時、(X,M) の $(\operatorname{Spf} V,N)$ 上の E を係数とする analytic cohomology $H^*_{\text{an}}((X,M)/(\operatorname{Spf} V,N),E)$ （しばしば $H^*_{\text{an}}((X/V)^{\log},E)$ と略記する）を

$$H^*_{\text{an}}((X,M)/(\operatorname{Spf} V,N),E) := H^*(]X[^{\log}_P, DR(E))$$

で定義する。

一般には図式 (5.1) に fit する (P,L) が存在するとは限らないし、存在しても unique とは限らない。しかし、local には図式 (5.1) に fit する (P,L) が存在するのでČech covering を利用して (X,M) の $(\operatorname{Spf} V,N)$ 上の E を係数とする analytic cohomology が一般の (X,M) に対して定義される。そしてその定義が（local な所での）(P,L) の取り方に依らないことも証明できる。

さて、log convergent Poincaré lemmaを述べる。次の図式が与えられたとする：

$$\begin{array}{ccc} (X,M) & \xrightarrow{i} & (P,L) \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ (\operatorname{Spec} k, \iota^*N) & \xrightarrow{\iota} & (\operatorname{Spf} V, N) \end{array} \tag{5.2}$$

ここで$(X,M) \xrightarrow{f} (\operatorname{Spec} k, \iota^*N) \xrightarrow{\iota} (\operatorname{Spf} V, N)$はこの節の最初のとおりで、$i$はclosed immersionで、$g$はlog smoothかつintegralな射であるとする。またPはaffineで、iにはchartが存在すると仮定する。$(X/V)^{\log}_{\mathrm{conv}}$上の層$E$に対して$X$上のZariski層$u_*E$を$u_*E(U) := H^0((U/V)^{\log}_{\mathrm{conv}}, E)$により定義し、$Ru_*$を関手$u_*$のright derived functorとする。この時、log convergent Poincaré lemmaは次のように述べられる。(これが通常のPoincaré lemma(Theorem 2.2)のp進的な類似である。)

Theorem 5.5 (log convergent Poincaré lemma). 記号は上の通りで、Eを$(X/V)^{\log}_{\mathrm{conv}}$上のlocally free isocrystalとする。この時、次のcanonicalなquasi-isomorphismが存在する：

$$Ru_*E \cong \mathrm{Red}_*(DR(E)).$$

ここでRedはReduction mapから定まる射$]X[^{\log}_P \longrightarrow X$で、$DR(E)$は$]X[^{\log}_P$上に$E$から定まるlog de Rham complexである。

特に、両辺のcohomologyをとることにより、次の同型が言える：

$$H^*((X/V)^{\log}_{\mathrm{conv}}, E) \cong H^*_{\mathrm{an}}((X/V)^{\log}, E).$$

つまり、log convergent Poincaré lemmaは、log convergent site $(X/V)^{\log}_{\mathrm{conv}}$における良い層(locally free isocrystal) Eのcohomologyが、analytic cohomologyというあるde Rham complex的なもののcohomologyで書けるということを主張している。

Log convergent Poincaré lemmaの証明は省略するが、Ogusの論文[O2]の議論をlog化することで得られる。詳しくは[Sh2]を参照のこと。

6. Log rigid geometry (II)

この節では、前節で定義したlog schemeに対するanalytic cohomologyと第4節で復習したrigid cohomologyとの関係を述べる。

この節では次の状況を考える：kを標数$p>0$の完全体、Vを混標数の完備離散付値体、KをVの分数体とする。そして、次の図式が与えられたとする。

$$(X,M) \xrightarrow{f} \operatorname{Spec} k \xhookrightarrow{\iota} \operatorname{Spf} V,$$

ここで、(X,M)はfs log schemeで、$\operatorname{Spec} k, \operatorname{Spf} V$にはtrivial log structureを与えてlog schemeあるいはformal log schemeと思う。また、fはproperかつlog smooth

であり、更にXは geometrically connected とする。そして、

$$U := X_{\text{triv}} = \{x \in X \mid \mathcal{O}_{X,x}^{\times} \cong M_x\}$$

とし、open immersion $U \hookrightarrow (X, M)$ をjと書く。

さて、Eを(X, M)のV上の log convergent site $((X, M)/V)_{\text{conv}}$上の isocrystal とする。この時、jによる pull-back j^*によりEは$(U/V)_{\text{conv}}$上の isocrystal j^*Eを定めるが、更に次が言える。(証明は省略する。)

Lemma 6.1. 状況は上の通りとし、$((X, M)/V)_{\text{conv}}$上の locally free isocrystal の圏を$I^{\text{lf}}(((X, M)/V)_{\text{conv}})$、$U$の$V$上の overconvergent isocrystal の圏を$O(U/V)$と書くことにする。この時、自然な関手$j^\dagger : I^{\text{lf}}(((X, M)/V)_{\text{conv}}) \longrightarrow O(U/V)$が存在して次の図式を可換にする：

$$\begin{array}{ccc}
I^{\text{lf}}(((X, M)/V)_{\text{conv}}) & \xrightarrow{j^\dagger} & O(U/V) \\
{\scriptstyle j^*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle r} \\
I((U/V)_{\text{conv}}) & = & I((U/V)_{\text{conv}}).
\end{array}$$

ここで、rはUのV上の overconvergent isocrystal を自然に$(U/V)_{\text{conv}}$上の isocrystal と見ることにより定義される関手である。

即ち、$((X, M)/V)_{\text{conv}}$上の locally free isocrystal Eは「Uへの制限」により自然にUのV上の overconvergent isocrystal $j^\dagger E$を定めるというわけである。

さて、以上の準備の下で、analytic cohomology と rigid cohomology の比較定理を述べる。(これが Theorem 2.3 のp進的な類似である。)

Theorem 6.2. $(X, M) \xrightarrow{f} \operatorname{Spec} k \xrightarrow{\iota} \operatorname{Spf} V$、$j : U \hookrightarrow X$ をこの節の最初の通りとし、$E \in I((X/V)_{\text{conv}}^{\log})$を次のいずれかと仮定する：

1. $E = K \otimes \mathcal{O}_{X/V}$.
2. $\operatorname{Spec} k$の Frobenius 写像をF_kとしてF_kの$\operatorname{Spf} V$への持ち上げσと自然数$a > 0$が与えられているとし、Eはある写像$\Phi : F^{a,*}E \longrightarrow E$(ここで$F^{a,*}$は Definition 3.5 の前の説明の通りとする)に対してF^a-isocrystal (E, Φ)を定めている。(この時Eは locally free になることがわかる。)

この時、次の自然な同型が存在する：

$$H_{\text{an}}^*((X, M)/\operatorname{Spf} V, E) \cong H_{\text{rig}}^*(U, j^\dagger E).$$

証明の概略を簡単に述べる。まず、[KKMS]、[Kk2] による次の結果を思い出そう：

Theorem 6.3 (Kempf–Knudsen–Mumford–Saint-Donat, Kato). 記号を上の通りとする時、以下の条件を満たす fs log scheme の射 $(X', M') \longrightarrow (X, M)$ が「fan の細分により」(詳しくは略) 構成出来る：

1. g は proper かつ log etale な射である。
2. $X'_{\mathrm{triv}}, X_{\mathrm{triv}}$ を
$$X'_{\mathrm{triv}} := \{x \in X' \mid \mathcal{O}^{\times}_{X,x} \cong M_x\},$$
$$X_{\mathrm{triv}} := \{x \in X \mid \mathcal{O}^{\times}_{X,x} \cong M_x\}$$
で定義する時、g は同型 $X'_{\mathrm{triv}} \xrightarrow{\sim} X_{\mathrm{triv}}$ を導く。
3. $Rg_*\mathcal{O}_{X'} = \mathcal{O}_X$ を満たす。
4. X' は k 上 smooth であり、任意の $x \in X'$ に対してある自然数 $r(x) \geq 0$ が存在して $M'_x/\mathcal{O}^{\times}_{X,x} \cong \mathbb{N}^{r(x)}$ が成立する。

さて、(X, M) を Theorem 6.2 の通りとし、Theorem 6.3 のように (X', M') をとる。この時、まず同型
$$H^*_{\mathrm{an}}((X, M)/\mathrm{Spf}\, V, E) \cong H^*_{\mathrm{an}}((X', M')/\mathrm{Spf}\, V, g^*E)$$
を示すことが出来る。そこで (X, M) を (X', M') で置き換えることにより (X, M) は (X', M') に対する条件 4. を満たすとしてよい。この時、M は X のある単純正規交叉因子 D に associate しているとしてよい。さらに spectral sequence を用いて local な場合に帰着することにより、X は $\mathrm{Spf}\, V$ 上の smooth な p-adic admissible formal scheme P に持ち上がり、D も P 内にうまく持ち上がるとしてよい。それを Z とおく。

以下の議論は本質的に Baldassarri と Chiarellotto によるものである ([Ba-Ch])。$U_\lambda := P_{\mathrm{rig}} - [D]_{P,\lambda}$ とおき、open immersion $U_\lambda \longrightarrow P_{\mathrm{rig}}$ を j_λ とおくと、定理の左辺は $H^*(P_{\mathrm{rig}}, DR(E))$, 右辺は $\varinjlim_{\lambda \to 1} H^*(P_{\mathrm{rig}}, j_{\lambda,*}j_\lambda^{-1}DR(E))$ となる。更に適当な admissible covering を考えることにより、$j_\lambda : U_\lambda \hookrightarrow P_{\mathrm{rig}}$ を $j_\lambda : C^s_{A,\lambda} \hookrightarrow D^s_A$ で置き換えて上の同型を示せばよいことがわかる。但しここで、A はある affinoid algebra で、D^s_A は $\mathrm{Sp}\, A$ 上の s 次元の半径 1 の開円盤、$C^s_{A,\lambda}$ は D^s_A の半径が λ より大きい部分として定義される開アニュラスである。Kiehl の Theorem B により、この時は de Rham complex の global section をとって出来る complex 間の射
$$\Gamma(DR(E)) \longrightarrow \Gamma(j_\lambda^{-1}DR(E))$$
が quasi-isomorphism であることを各 λ について示せば充分である。

さて、D^s_A 上の log singularity を持つ微分方程式系の理論など ([Ba-Ch, §5], [Ba-Ch2]) を用いて $E = K \otimes \mathcal{O}_{X/V}$ の場合に帰着できることがわかり（ここで E についての仮定を用いる）、更にこの時は第 2 節の Theorem 2.3 の証明の概略で述べたの

と全く同じ方法でホモトピーを構成することにより complex の quasi-isomorphism $\Gamma(DR(E)) \longrightarrow \Gamma(j_\lambda^{-1}DR(E))$ を示すことが出来る。

さて、Theorem 6.2 よりまず次の Corollary が言える。これが Corollary 2.4 の p 進版である。

Corollary 6.4. $(X, M) \xrightarrow{f} \operatorname{Spec} k \xrightarrow{\iota} \operatorname{Spf} V$、$j : U \hookrightarrow X$、$E$ を Theorem 6.2 の通りとする時、rigid cohomology $H^*_{\mathrm{rig}}(U, j^\dagger E)$ は有限次元 K-vector space である。

すなわち特別な係数を持つ rigid cohomology の有限性定理が証明できる。

Outline of Proof. Theorem 6.2 および Theorem 5.5 (log convergent Poincaré lemma) より、$H^*(((X, M)/\operatorname{Spf} V)_{\mathrm{conv}}, E)$ の有限性を示せばよいが、これは log convergent site と log crystalline site との比較定理（これも Ogus[O2] の方法を log 化することで証明できる）により、(X, M) の $\operatorname{Spf} W(k)$ 上の係数付の log crystalline cohomology の有限性に帰着され、これは X が $\operatorname{Spec} k$ 上 proper なことを用いて通常の crystalline cohomology の場合と同様に証明出来る。 □

Remark 6.5.
1. $E = K \otimes \mathcal{O}_{X/V}$ の時は、これは Berthelot の結果 ([Be2]) に含まれる。
2. X が 1 次元の時は、上の Corollary は Crew の結果 ([Cr]) の特別な場合である。
3. 上の Corollary における係数の条件（の 2. の方）は「overconvergent F^a-isocrystal で、縁に沿った所まで logarithmic な F^a-isocrystal として延びている」という感じの条件である。一般に $\operatorname{Spec} k$ 上 smooth な代数多様体 U 上の任意の overconvergent F^a-isocrystal E を係数とする rigid cohomology $H^*_{\mathrm{rig}}(U, E)$ は有限次元であろうと期待されており、実際 E が unit-root F^a-isocrystal の時には、都築氏により有限性定理が証明された ([T1], [T2])。

最後に、上の Theorem 6.2 のもう一つの系と、そのクリスタル基本群を用いた言い換えを述べる。これは、第3節で筆者が述べたクリスタル基本群に関する期待（Hope 3.4）が実際正しいということを述べている。これが Corollary 2.7, 2.8 の p 進的な類似である。

Corollary 6.6. $(X, M) \longrightarrow \operatorname{Spec} k \hookrightarrow \operatorname{Spf} V, j : U \hookrightarrow X$ をこの節の最初の通りとし、$j^\dagger : I^{\mathrm{lf}}(((X, M)/V)_{\mathrm{conv}}) \longrightarrow O(U/V)$ を Lemma 6.1 で述べた functor とする。この時、$j^\dagger$ は自然に圏の同値

$$j^\dagger : NI(((X, M)/V)_{\mathrm{conv}}) \xrightarrow{\sim} NO(U/V)$$

を導く。

Corollary 6.7. $(X, M) \longrightarrow \operatorname{Spec} k \hookrightarrow \operatorname{Spf} V, j : U \hookrightarrow X$ をこの節の最初の通りとし、$x \in U(k)$ とする。この時、クリスタル基本群$\pi_1^{\mathrm{crys}}((X, M)/\operatorname{Spf} V, x)$ は U と x のみに依る。(すなわち U の log smooth な compact 化 (X, M) の取り方には依らない。)

Corollary 6.7 は Corollary 6.6 の言い換えである。そこで以下、Corollary 6.6 の証明の概略を述べる。次の図式を考える：

$$\begin{array}{ccc} NI(((X,M)/V)_{\mathrm{conv}}) & \xrightarrow{j^\dagger} & NO(U/V) \\ {\scriptstyle j^*}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle r} \\ NI((U/V)_{\mathrm{conv}}) & = & NI((U/V)_{\mathrm{conv}}). \end{array}$$

まず、(log) convergent site において 1 次の cohomology が拡大類で解釈されることを用いて、

$$j^* : H^1(((X,M)/V)_{\mathrm{conv}}, K \otimes \mathcal{O}_{X/V}) \longrightarrow H^1((U/V)_{\mathrm{conv}}, K \otimes \mathcal{O}_{U/V})$$

が単射であることが示される（詳細は省略する)。すると、これと同型

$$j^* : H^0(((X,M)/V)_{\mathrm{conv}}, K \otimes \mathcal{O}_{X/V}) \longrightarrow H^0((U/V)_{\mathrm{conv}}, K \otimes \mathcal{O}_{U/V})$$

(両辺は K と同型) より任意の $E \in NI(((X,M)/V)_{\mathrm{conv}})$ に対して

$$j^* : H^0(((X,M)/V)_{\mathrm{conv}}, E) \longrightarrow H^0((U/V)_{\mathrm{conv}}, E)$$

が同型になるので、j^*は fully faithful である。一方、Berthelot により、r は faithful であることが知られている。よって $j^\dagger$も fully faithful となる。(r も fully faithful となることが言える。)

次に essential surjectivity を、$E \in NO(U/V)$ の rank に関する帰納法で示す。$E \in NO(U/V)$ より、次の $NO(U/V)$ における完全列が存在する。

$$0 \to E' \to E \to \mathcal{O} \to 0.$$

ここで $E' \in NO(U/V)$ である。すると帰納法の仮定よりある $F' \in NI(((X,M)/V)_{\mathrm{conv}})$ が存在して $E' = j^\dagger F'$と書ける。上の完全列が定める $H^1_{\mathrm{rig}}(U, E')$ の元を $[E]$ と書く。すると Theorem 6.2 と log convergent Poincaré lemma および five lemma を用いて得られる同型

$$j^\dagger : H^1(((X,M)/V)_{\mathrm{conv}}, F') \longrightarrow H^i_{\mathrm{rig}}(U, E')$$

よりある $NI(((X,M)/\operatorname{Spf} V)_{\mathrm{conv}})$ における完全列

$$0 \to F' \to F \to K \otimes \mathcal{O}_{X/V} \to 0$$

が存在して、この列が定める拡大類 $[F] \in H^1(((X,M)/V)_{\mathrm{conv}}, F')$ は $j^\dagger[F] = [E]$ をみたす。すると $j^*[F] = r[E]$ である。すなわち次の 2 つの完全列は同じ拡大類を定

める：

$$0 \to r(E') \to r(E) \to K \otimes \mathcal{O}_{U/V} \to 0,$$
$$0 \to j^*F' \to j^*F \to K \otimes \mathcal{O}_{U/V} \to 0.$$

従って $r(E) \cong j^*F = r(j^\dagger F)$ となり、r の fully-faithfulness より $E \cong j^\dagger F$ となる。これで essential surjectivity が言える。

References

[Ba] F. Baldassarri, *Comparaison entre la cohomologie algébrique et la cohomologie p-adique rigide á coefficients dans un module différentiel II*, Math. Ann., **280**(1988), 417–439.

[Ba-Ch] F. Baldassarri and B. Chiarellotto, *Algebraic versus Rigid Cohomology with Logarithmic Coefficients*, in Barsotti Symposium in Algebraic Geometry, Academic Press.

[Ba-Ch2] F. Baldassarri and B. Chiarellotto, *Formal and p-adic theory of differential systems with logarithmic singularities depending upon parameters*, Duke Math. J., **72**(1993), 241–300.

[Be1] P. Berthelot, *Géométrie Rigide et Cohomologie des Variétés Algébriques de Caractéristique p*, Bull. Soc. Math. de France, Mémoire **23**(1986), 7–32.

[Be2] P. Berthelot, *Finitude et pureté cohomologique en cohomologie rigide*, Invent. Math., **128**(1997), 329–377.

[Be3] P. Berthelot, *Cohomologie rigide et cohomologie rigide a supports propres, Première Partie*, preprint.

[Cr] R. Crew, *Finiteness theorems for the cohomology of an overconvergent isocrystals on a curve*, preprint.

[D1] P. Deligne, *Equations Différentielles á Points Singuliers Réguliers*, Lecture Note in Math. 163, Splinger Verlag.

[D2] P. Deligne, *Catégories Tannakiennes*, in Grothendieck Festschrift, Progress in Mathematics, Birkhäuser.

[D-Mi] P. Deligne and J. S. Milne, *Tannakian Categories*, in Hodge Cycles, Motives, and Shimura Varieties, Lecture Note in Math. 900, Springer Verlag, 1982, pp. 101–228.

[Kk1] K. Kato, *Logarithmic Structures of Fontaine-Illusie*, in Algebraic Analysis, Geometry, and Number Theory, J-I.Igusa ed., The Johns Hopkins University Press, pp. 191–224.

[Kk2] K. Kato, *Toric Singularities*, American Journal of Mathematics, **116**(1994), 1073–1099.

[KKMS] G. Kempf, F. Knudsen, D. Mumford, B. Saint-Donat, *Toroidal Embeddings I*, Springer Lecture Note **339**, 1973.

[O1] A. Ogus, *F-isocrystals and de Rham Cohomology II — Convergent Isocrystals*, Duke Math., **51**(1984), 765–850.

[O2] A. Ogus, *The Convergent Topos in Characteristic p*, in Grothendieck Festschrift, Progress in Math., Birkhäuser.

[Sa] N. Saavedra Rivano, *Catégories Tannakiennes*, Springer Lecture Note, **265**, 1972.

[Sh1] A. Shiho, *Crystalline Fundamental Groups I — Isocrystals on Log Crystalline Site and Log Convergent Site*, preprint.

[Sh2] A. Shiho, *Crystalline Fundamental Groups II — Overconvergent Isocrystals*, preprint.

[T1] N. Tsuzuki, *Morphisms of F-isocrystals and the finite monodromy theorem for unit-root F-isocrystals*, preprint.

[T2] N. Tsuzuki, *On the Gysin isomorphism of rigid cohomology*, preprint.